

Détecteur par Traitement de Signal sur une Image Temps-Fréquence

Reihan Mazouz

December 12, 2024

1 Problème de détection d'un signal inconnu

On se pose le problème de la détection d'un signal noyé dans un bruit blanc gaussien additif sur un élément de STFT (Short Time Fourier Transform).

On note $s_{jk}(y)$, la STFT en k et en j , les localisations temporelles et fréquentielles, du vecteur y :

$$s_{jk}(y) = \sum_{t=k}^{k+N} y(t)w(t-k)e^{-i2\pi jt}$$

Où N est la longueur de la fenêtre temporelle w .

2 Distribution complexe normale [1]

Soit $X \sim N(M_x, \Sigma_x^2)$ et $Y \sim N(M_y, \Sigma_y^2)$ deux vecteurs de n variables aléatoires dont la distribution est normale, alors $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ iY \end{pmatrix}$ suit une loi complexe normale que l'on note : $\mathbf{Z} \sim \mathbb{CN}(\mathbf{M}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{C})$. Avec la moyenne $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ iM_y \end{pmatrix}$, la covariance $\mathbf{\Gamma} = \text{Cov}(\mathbf{Z}) = E((\mathbf{Z} - \mathbf{M})(\overline{\mathbf{Z} - \mathbf{M}})^\top) = E((\mathbf{Z} - \mathbf{M})(\mathbf{Z} - \mathbf{M})^*)$ et la pseudo-covariance $\mathbf{C} = E((\mathbf{Z} - \mathbf{M})(\mathbf{Z} - \mathbf{M})^\top) = \text{Cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$.

La fonction de densité de probabilité de $\mathbf{Z}$ est définie par :

$$f(\mathbf{Z}) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^H & \mathbf{\bar{\Gamma}} \end{bmatrix} \right)}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{M})^H \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^H & \mathbf{\bar{\Gamma}} \end{bmatrix} \right)^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{M}) \right)$$

Dans la suite nous allons supposer que nos parties réelle et imaginaire sont indépendantes, X et Y suivent la même loi normale de moyenne M et de variance $\Sigma^2/2 = \frac{\sigma^2}{2} I_n$. Alors $\mathbf{Z}$ possède des propriétés de symétrie circulaires et est nommé "variable complexe propre". Voir: [2]

On a, $\mathbf{C} = \mathbf{0}_n$ et $\mathbf{\Gamma} = \Sigma^2$

3 Détection en deux étapes

3.1 GLRT (general likelihood ratio test)

L'objectif est d'estimer la présence ou l'absence d'un signal sur une cellule de STFT.

On se pose donc les hypothèses suivantes:

- $H_0 : s_{jk} = n_{jk}$
- $H_1 : s_{jk} = n_{jk} + x_{jk}$

Où n_{jk} et x_{jk} sont respectivement la STFT en k et en j du bruit et du signal.

Pour un bruit blanc gaussien de variance σ^2 , les valeurs réelles et imaginaires de s_{jk} suivent des loi normales centrée de variances $E_w \sigma^2/2$. [Voir annexe 5.2]

Ainsi la PDF de s_{jk} est :

$$f_0(z) = \frac{1}{\pi E_w \sigma^2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{E_w \sigma^2}\right)$$

Pour un signal et du bruit blanc gaussien $s_{jk} \sim \mathcal{N}(\mu_{jk}, \frac{\sigma^2}{2} E_w)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi E_w \sigma^2} \exp\left(-\frac{|z - \mu_{jk}|^2}{E_w \sigma^2}\right)$$

[1]

On applique le test généralisé de maximum de vraisemblance afin de maximiser P_D pour une P_{FA} fixée. On va décider H_1 si :

$$L(x) = \frac{\max_{\mu_z} f(s_{jk}; H_1)}{f(s_{jk}; H_0)} > \gamma$$

Où $f(s_{jk}; H_1)$ et $f(s_{jk}; H_0)$ sont les PDF de s_{jk} sous les hypothèses respectives H_1 et H_0 .

γ est défini pour un taux de Fausse Alarme fixé tel que :

$$P_{FA} = \int_{x:L(x)>\gamma} f(x; H_0) dx = \alpha$$

Où α est le taux de fausse alarme.

$\max_{\mu_z} f(s_{jk}; H_1)$ est atteint pour $\mu_z = s_{jk}$ [3]:

$$L(x) = \frac{\max_{\mu_z} f(s_{jk}; H_1)}{f(s_{jk}; H_0)} = \frac{\frac{1}{\pi E_w \sigma^2} \max_{\mu_z} \left(\exp \left(-\frac{|s_{jk} - s_{jk}|^2}{E_w \sigma^2} \right) \right)}{\frac{1}{\pi E_w \sigma^2} \exp \left(-\frac{|s_{jk}|^2}{E_w \sigma^2} \right)}$$

En passant au logarithme :

$$\log(L(x)) = \frac{|s_{jk}|^2}{E_w \sigma^2}$$

Donc :

$$\log(L(x)) > \log(\gamma) \iff |s_{jk}| > \sqrt{\log(\gamma) E_w \sigma^2} = \gamma'$$

Afin d'évaluer les performances de détection, on cherche P_D en fonction de P_{FA} . Sous H_0 , $|s_{jk}|$ suit une loi de Rayleigh :

$$P_{FA} = P_r(|s_{jk}| > \gamma'; H_0) = \int_{x>\gamma'} \frac{x}{\frac{E_w \sigma^2}{2}} \exp \left(-\frac{x^2}{E_w \sigma^2} \right) dx = \exp \left(-\frac{\gamma'^2}{E_w \sigma^2} \right)$$

Sous H_1 , $|s_{jk}|$ suit une loi de Rice:

$$P_D = P_r(|s_{jk}| > \gamma'; H_1) = \int_{x>\gamma'} \frac{x}{\frac{E_w \sigma^2}{2}} \exp \left(-\frac{x^2 + \mu_{jk}^2}{E_w \sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{2x\mu_{jk}}{E_w \sigma^2} \right) dx$$

Dont la solution est :

$$\begin{aligned} P_r(|s_{jk}| > \gamma'; H_1) &= Q_1\left(\frac{\mu_{jk}}{\sqrt{\frac{E_w \sigma^2}{2}}}, \frac{\gamma'}{\sqrt{\frac{E_w \sigma^2}{2}}}\right) \\ &= Q_1\left(\frac{\mu_{jk}}{\sqrt{\frac{E_w \sigma^2}{2}}}, -\sqrt{2 \log(P_{FA})}\right) \end{aligned}$$

Où Q_1 est la fonction Q de Marcum. [3]

3.2 Regroupement des points après seuillage

Formulation du problème :

Considérons un ensemble $\mathcal{N}$ composé de $N_{\text{total}} = N_{\text{fréquences}} \times N_{\text{temps}}$ points. Parmi ces points :

- $N_{\text{signal}} \in [0, N_{\text{total}}]$ est le nombre de points contenant du signal.
- $N_{\text{bruit}} = N_{\text{total}} - N_{\text{signal}}$ représente le nombre de points de bruit, c'est-à-dire les points n'incluant pas le signal.

Définissons les événements suivants :

- A_k : "détection de k points de signal parmi N_{signal} "
- B_k : "détection fausse de k points de bruit parmi N_{bruit} "

Les probabilités associées à ces événements sont :

- P_D : probabilité de détection de signal d'un élément de $\mathcal{N}$
- P_{FA} : probabilité de fausse alarme d'un élément de $\mathcal{N}$

Considérons un seuil K_{total} tel que $0 \leq K_{\text{total}} \leq N_{\text{total}}$.

La probabilité pour que K_{signal} points soient détectés parmi N_{signal} est donnée par :

$$P(A_{K_{\text{signal}}}) = \binom{N_{\text{signal}}}{K_{\text{signal}}} P_D^{K_{\text{signal}}} (1 - P_D)^{N_{\text{signal}} - K_{\text{signal}}}$$

La probabilité pour que K_{bruit} points soient faussement détectés parmi N_{bruit} est :

$$P(B_{K_{\text{bruit}}}) = \binom{N_{\text{bruit}}}{K_{\text{bruit}}} P_{FA}^{K_{\text{bruit}}} (1 - P_{FA})^{N_{\text{bruit}} - K_{\text{bruit}}}$$

En supposant les évènements A_k et B_k comme étant indépendants, on a :

$$P(A_k \cap B_k) = P(A_k) \cdot P(B_k)$$

L'évènement "Il y a K points détectés dans $\mathcal{N}$ " est noté :

$$\bigcup_{K_{\text{signal}} + K_{\text{bruit}} = K_{\text{total}}} A_{k_s} \cap B_{k_b}$$

Ainsi la probabilité de fausse alarme sur la boîte est notée :

$$P_{\text{FA-total}} = P\left(\bigcup_{k > K_{\text{total}}} B_k\right) = \sum_{k=K_{\text{total}}}^{N_{\text{total}}} P(B_k)$$

Et la probabilité de détection, obtenue lorsque la somme $K_{\text{signal}} + K_{\text{bruit}} > K_{\text{total}}$, est donnée par :

$$P_{\text{D-total}} = \sum_{K_{\text{signal}}=0}^{N_{\text{signal}}} \sum_{K_{\text{bruit}}=0}^{N_{\text{bruit}}} P(A_{K_{\text{signal}}}) P(B_{K_{\text{bruit}}}) \quad \text{pour } K_{\text{signal}} + K_{\text{bruit}} > K_{\text{total}}$$

Autrement dit :

$$P_{\text{D-total}} = \sum_{K=K_{\text{total}}}^{N_{\text{signal}}} \sum_{K_{\text{signal}}=0}^K \sum_{K_{\text{bruit}}=0}^{K-K_{\text{signal}}} P(A_{K_{\text{signal}}}) P(B_{K_{\text{bruit}}})$$

4 Détection en une étape

4.1 Formulation du problème

Dans un premier temps, nous considérerons un vecteur $\mathbf{Z}$ composé de n points de STFT suivant une loi normale complexe : $\mathbf{Z} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{M}_{\mathbf{z}}, E_w \sigma^2 \mathbf{I}_n, \mathbf{0}_{\mathbf{K}})$. L'objectif sera de déterminer la présence ou l'absence de signal sur l'ensemble des points de $\mathbf{Z}$.

4.2 GLRT [1] [3]

On se pose les hypothèses suivantes:

- $H_0 : \mathbf{M}_z = \mathbf{0}_{2n}$
- $H_1 : \mathbf{M}_z \neq \mathbf{0}_{2n}$

Pour un bruit blanc gaussien, la PDF de $\mathbf{Z}$ est :

$$f_0(\mathbf{Z}) = \frac{1}{\pi^n (\sigma^2 E_w)^n} \exp(-\mathbf{Z}^* \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{Z})$$

Pour un signal et du bruit blanc gaussien :

$$f_1(\mathbf{Z}) = \frac{1}{\pi^n (\sigma^2 E_w)^n} \exp(-(\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^* \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z))$$

On applique le test généralisé de maximum de vraisemblance afin de maximiser P_D pour une P_{FA} fixée. On va décider H_1 si :

$$L(\mathbf{Z}) = \frac{\max_{\mathbf{M}_z} f(\mathbf{Z}; H_1)}{f(\mathbf{Z}; H_0)} > \gamma$$

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{M}_z} f(\mathbf{Z}; H_1) &= \max_{\mathbf{M}_z} e^{-(\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^* \frac{1}{\sigma^2 E_w} I_n (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)} \\ &= \min_{\mathbf{M}_z} (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^* (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z) \end{aligned}$$

$\max_{\mathbf{M}_z} f(\mathbf{Z}; H_1)$ est atteint pour $\hat{\mathbf{M}}_z = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix}$ où $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont les moyennes des vecteurs respectifs $X = \text{Re}(\mathbf{Z})$ et $Y = \text{Im}(\mathbf{Z})$. [voir annexe 5.3]

$$L(x) > \gamma \iff \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} - (\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{M}}_z)^* (\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{M}}_z) > \log(\gamma) E_w \sigma^2$$

$$\iff X^2 - (X - \hat{X})^2 + Y^2 - (Y - \hat{Y})^2 > \log(\gamma) E_w \sigma^2$$

$$\iff 2\hat{X} \sum_{i=1}^n (X_i) + 2\hat{Y} \sum_{i=1}^n (Y_i) - n\hat{X}^2 - n\hat{Y}^2 > \log(\gamma) E_w \sigma^2$$

$$\iff 2n\hat{X}^2 + 2n\hat{Y}^2 - n\hat{X}^2 - n\hat{Y}^2 > \log(\gamma) E_w \sigma^2$$

$$\iff \sqrt{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2} > \sqrt{\frac{\log(\gamma) E_w \sigma^2}{n}} = \gamma'$$

4.3 Calcul de P_{FA}

$$P_{FA} = P_r(\sqrt{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2} > \gamma', H_0)$$

$\hat{X}$ et $\hat{Y}$ suivent des lois normales centrées de variances $\frac{\sigma^2}{2n}$ sous H_0 . Leur somme quadratique suit une loi de Rayleigh.

$$P_{FA} = \exp(-\frac{\gamma'^2 n}{E_w \sigma^2})$$

4.4 Calcul de P_D

Sous H_1 , la somme quadratique de $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ suit une loi de Rice.

$$P_D = P_r(\sqrt{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2} > \gamma', H_1) = Q_1(\sqrt{\frac{2n}{E_w}} \frac{\mu_n}{\sigma}, \sqrt{\frac{2n}{E_w}} \frac{\gamma'}{\sigma})$$

$$P_D = Q_1(\frac{\mu_n}{\sqrt{\frac{E_w \sigma^2}{2n}}}, \sqrt{-2 \log(P_{FA})})$$

Où Q_1 est la fonction Q de Marcum.

5 Annexe

5.1 Tableau des hypothèses

Table 1: P_D et P_{FA} en fonction de H_0 et H_1

	H_0	H_1
H_0		P_{FA}
H_1	P_M	P_D

5.2 Démonstration loi de s_{jk}

Pour montrer que s_{jk} sous H_0 suit une loi complexe normale de moyenne nulle, nous devons montrer que sa partie réelle x_{jk} et imaginaire y_{jk} suivent une loi normale centrée.

x_{jk} et y_{jk} sont une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, chacune étant pondérée par la fenêtre $w(t - k)$. Par conséquent, elles suivent également une distribution gaussienne. De plus, comme chaque terme de la somme a une moyenne de zéro et une variance de $E_w \frac{\sigma^2}{2N}$, où N est la longueur de la fenêtre w , $x_{jk}, y_{jk} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2} E_w)$, où l'on a noté $E_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w[i - k]^2$

$$\begin{aligned} \text{Var}(b(k)w(k)e^{-2\pi ijk}) &= E \left[(b(k)w(k)e^{-2\pi ijk})^2 \right] = E[b(k)^2] \cdot E[w(k)^2] \cdot E[e^{-2\pi ijk}]^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2N} E_w \end{aligned}$$

5.3 Maximisation de la fonction de vraisemblance $f(Z; H_1)$

$$\max_{\mathbf{M}_z} f(Z; H_1) = \min_{\mathbf{M}_z} (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^* (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z) = \min_{\mathbf{M}_z} J(\mathbf{M}_z)$$

Où l'on a noté $J(M_z)$ la fonction de coût. En notant $M = M_{\text{re}} + iM_{\text{im}}$, la décomposition en partie réelle et imaginaire de J nous donne :

$$\begin{aligned} J(M) &= (X - M_{\text{re}} - i(Y - M_{\text{im}}))(X - M_{\text{re}} + i(Y - M_{\text{im}})) \\ &= (X - M_{\text{re}})^2 + (Y - M_{\text{im}})^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser cette fonction de coût par rapport à M_{re} et M_{im} , nous considérons les dérivées partielles de $J(M)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial M_{\text{re}}} = 2 \sum_{i=1}^n (X_i - M_{\text{re}}) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial M_{\text{im}}} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - M_{\text{im}}) = 0 \end{cases}$$

La solution de ces équations nous donne les valeurs optimales de M_{re} et M_{im} :

$$\begin{cases} M_{\text{re}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ M_{\text{im}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \end{cases}$$

5.4 Methode 3 : Calcule de μ_n

En notant X_s et Y_s les parties réelles, respectivement imaginaires, de la STFT du signal

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_{s,i} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{s,i} \right)^2}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n_s} X_{s,i} + \sum_{i=n_s+1}^n X_{s,i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n_s} Y_{s,i} + \sum_{i=n_s+1}^n Y_{s,i} \right)^2}$$

Avec n_s le nombre de points comprenant du signal et du bruit. On a donc :

$\forall i \in [1, n_s], X_{s,i}, Y_{s,i} = \text{Re}(\sum_{k=1}^N s_k e^{-2j\pi f_i \frac{k}{n_{fft}}} w_k), \text{Im}(\sum_{k=1}^N s_k e^{-2j\pi f_i \frac{k}{n_{fft}}} w_k)$
et $X_{s,i}, Y_{s,i} = 0$ sinon.

Puis en supposant que la puissance du signal est uniformément répartie en temps et en fréquence:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{(n_s X_1)^2 + (n_s Y_1)^2}$$

$$= \frac{n_s}{\sqrt{n}} \sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}$$

$$= \frac{n_s}{\sqrt{n}} \sqrt{E_s}$$

Où E_s est l'énergie du signal dans la case de STFT considérée :
 $E_s = \frac{P_s N E_w}{f_s}$. Avec P_s la puissance du signal, N la longueur de la fenêtre temporelle de la STFT et f_s la fréquence d'échantillonnage.

5.5 Loi de Rayleigh et Loi de Rice

5.5.1 Loi de Rayleigh

La loi de Rayleigh est souvent utilisée pour modéliser la magnitude d'un vecteur bidimensionnel dont les composantes sont indépendantes, identiquement distribuées et suivent une distribution normale centrée. La fonction de densité de probabilité (PDF) de la loi de Rayleigh est donnée par :

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$$

où σ est le paramètre d'échelle de la distribution, représentant l'écart-type des composantes normales.

La fonction de répartition (CDF) associée à la loi de Rayleigh est :

$$F(x; \sigma) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$$

5.5.2 Loi de Rice

La loi de Rice (ou Rician) généralise la loi de Rayleigh pour un vecteur bidimensionnel dont les composantes sont normalement distribuées avec une moyenne non nulle. Elle est définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x; \nu, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0$$

où ν est la distance euclidienne entre l'origine et le centre de la distribution des composantes, σ est le paramètre d'échelle, et I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre zéro.

La fonction de répartition de la loi de Rice peut s'écrire comme :

$$F(x; \nu, \sigma) = 1 - Q_1\left(\frac{\nu}{\sigma}, \frac{x}{\sigma}\right), \quad x \geq 0$$

où Q_1 est la fonction de Marcum Q de première ordre.

References

- [1] Leigh J. Halliwell , Complex Random Variables
- [2] Stanford cours , Detection and estimation in additive Gaussian noise
- [3] Steven M.Kay , Fundamentals of Statistical Signal Processing vol II chapter 6.3, University of Rhode Island
- [4] Timothée Rouffet, Pascal Vallet , Eric Grivel , Bernard Joseph , Cyrille Enderli , Stéphane Kemkemian , Analyse d'un GLRT pour la détection de cibles étendues , THALES Systèmes Aéroportés, Université de Bordeaux, Bordeaux INP, IMS, UMR CNRS
- [5] Fredy D. Neeser, James L. Massey , Proper Complex Random Processes with Applications to Information Theory , 1993.